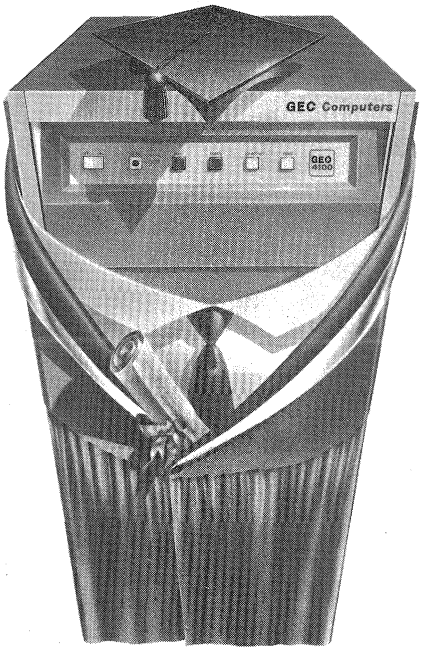
"Q"

Dice quanto sono buone le bobine. Ma non solo: hanno un Q anche i quarzi, le automobili, i pianoforti e... persino la nostra vecchia amica terra. In queste pagine, scopriremo tutti i segreti del fattore di merito.

a cura di IK5DVS
Mariano Veronese



L'altro giorno, parlando con uno studente che usava un Q-metro, ci è sovvenuto del vasto campo di applicazione che ha ormai questa lettera senza nome. Abbiamo chiesto allo studente cosa stava misurando ed egli ha risposto che "Q" aveva qualcosa a che fare con la "bontà" della bobina, ma ci ha lanciato uno sguardo vacuo quando gli abbiamo chiesto: "Sai che trova applicazione anche nell'ambito delle righe spettrali?"
Non abbiamo mentito: infatti, il fattore Q ha a che fare con le caratteristiche delle righe spettrali e delle induttanze e dei circuiti oscillanti... Ma il fattore Q appare anche nelle corde di un pianoforte, nei risuonatori a quarzo, nelle automobili, nelle sale da concerto, nelle palle che rimbalzano e, tra l'altro, persino il pianeta Terra ha il suo Q. Lo studente studiava ingegneria elettronica, attività che ai giorni nostri difficilmente aumenta l'apertura mentale dell'individuo, ed allora come poteva saperlo?
L'aspetto strano di Q è che non rappresenta altro che... Q.
Non c'è una grandezza con tanto di nome della quale costituisce il simbolo. Se ne deduce che Q misura un certo numero di cose e tutte queste cose sono spesso capite solo parzialmente. Anche in questo caso siamo di fronte ad un'area nebulosa, spesso inadeguatamente trattata nei corsi di studio.
L'argomento ha suscitato recentemente un piccolo trambusto di interesse, in forma di lettere provenienti da venerabili istituzioni di Cambridge che ponevano domande sull'argomento.
Lady Jeffreys e D. McMullan hanno svolto un'inchiesta ed hanno pure scritto una breve nota nel "Quartely Journal" della Royal Astronomical Society. Sembra che i geofisici abbiano scoperto il fattore Q grazie al lavoro dei tecnici delle microonde, durante e dopo la seconda guerra mondiale. Sembra inoltre che questi nostri colleghi intendano usare il reciproco di Q, ma più tardi dimostreremo che si tratta del fattore di dissipazione, già noto in questa forma. Siamo stati sorpresi di scoprire in alcuni testi che qualcuno ha chiamato Q il fattore di dissipazione, ovviamente un errore.

È vero senza ombra di dubbio che Nicola Tesla era al corrente dell'amplificazione causata da un circuito oscillante quando ha utilizzato i suoi enormi rapporti LC per produrre livelli di radiofrequenza di chilo e megavolt nei secondari dei trasformatori che hanno preso il suo nome.

Origini

Le origini di questo simbolo senza nome sono un po' oscure.
Abbiamo preso atto della testimonianza che il simbolo Q è apparso la prima volta che negli appunti di K.S. Johnson, che lavorava alla sezione tecnica della Western Electric Co. (U.S.A.) ai tempi della prima guerra mondiale. Già nel 1914 Johnson sembrava essere conscio dell'importanza del "rapporto tra la reattanza e la resistenza di una bobina", ma a quei tempi l'aveva chiamato "K".
Dal 1920 egli ha usato la lettera Q per questo rapporto e, quando gli veniva chiesto il perché di questa scelta, rispondeva: "Ebbene, non è vero che sia l'iniziale di Quality factor (fattore di merito) ma, poiché tutte le altre lettere erano troppo usate, non rimaneva che usare la Q". Molti riferimenti al Q si trovano nel suo libro riguardante le tecniche telefoniche, pubblicato nel 1924/25.
A quei tempi, il Q era un fattore adimensionale senza un nome preciso, ma era definito come:

$$Q = \frac{\omega L}{R}$$

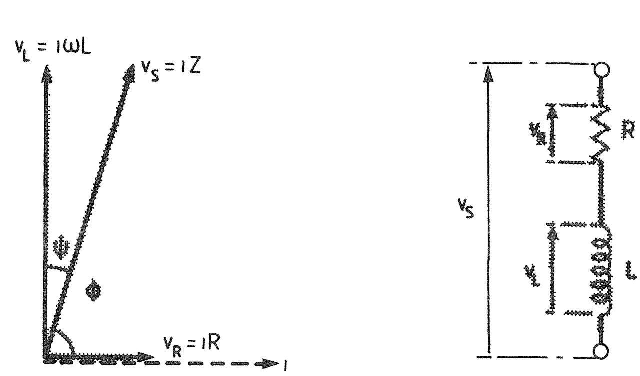


Figura 1. Il fasore di corrente i è comune ad L e ad R, nel collegamento in serie mostrato a lato. V_R è in fase con i, mentre V_L è in anticipo di 90°. L'angolo di fase tra i e V_S viene usato per il calcolo del fattore di potenza. Il valore (psi = 90° — phi) viene spesso definito "angolo di perdita".

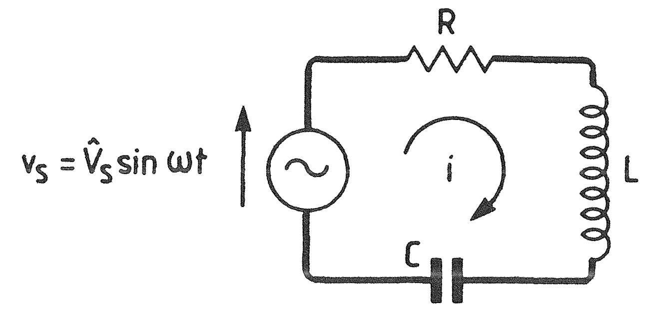


Figura 2. Poiché vs controlla la corrente attraverso il circuito, l'energia accumulata si trasferisce alternativamente tra il condensatore e l'induttore che la immagazzina in forma di energia magnetica. Durnate ciascun ciclo, la resistenza R dissipa in calore parte dell'energia.

Molto prima di questa data i tecnici utilizzavano il rapporto di smorzamento di un treno d'onde, ovvero il decremento logaritmico delta nel campo delle comunicazioni radio ed il fattore di potenza cosϕ nel campo delle correnti forti. Anche il fattore di Dissipazione D era ampiamente usato ed era evidentemente qualcosa che "andava nella direzione sbagliata" ed è stata la natura psicologicamente insoddisfacente di D che ha spinto Johnson ad usare il suo reciproco, battezzandolo infine con la lettera Q.
Il fattore D aumentava proporzionalmente alle perdite, cioè man mano che le prestazioni peggioravano. Inoltre il fattore di dissipazione tende a divenire un piccolo numero frazionario nel settore delle correnti deboli.
Il suo reciproco Q è un numero intero, talvolta molto grande ed aumenta con l'aumento della qualità delle prestazioni. Per quanto Johnson abbia negato di aver mai pensato ad un "fattore di merito", V.E. Legg ha propagandato questo possibile significato, che ha preso piede. Molto presto si osservò che Q non era in relazione soltanto con il D, ma anche con il delta ed il cosϕ. Un'interessante definizione collaterale, il logaritmo decimale di delta, era molto importante nell'era dei trasmettitori a scintilla, con i loro treni di onde smorzate. Ma quando prevalsero le tecniche a banda stretta ed onde persistenti, la sua importanza decrebbe quasi a zero (ritornando ai laboratori dove erano ancora utilizzati alcuni galvanometri balistici).

Cos'È il Q

La Figura 1 mostra un normale diagramma vettoriale simbolico che vale, in questo caso, per un induttore con perdite. Dalla geometria dei vettori simbolici (fasori) risulta che il fattore di potenza è:

$$\cos \phi = \frac{R}{Z}$$

Il fattore di dissipazione è:

$$D = \frac{R}{\omega L} = \tan \psi$$

Q è semplicemente il reciproco di D:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \cot \psi$$

Presenta qualche interesse osservare che D è proporzionale alla potenza dissipata nel circuito (i^2R), mentre Q è proporzionale all'energia immagazzinata ($0,5Li^2$).
Un altro argomento interessante è il fatto che i tecnici delle correnti forti tendono a massimizzare la dissipazione, in altre parole vogliono arrivare all'angolo di fase zero, cioè a cos$\phi = 1$, mentre i tecnici delle comunicazioni tendono a minimizzare le perdite, cioè a indurre "psi" al minimo possibile, vale a dire che vogliono ottenere elevati Q.
Il fattore Q delle induttanze tende ad essere minore di quello ottenuto con i condensatori di buona qualità. Di conseguenza, nei circuiti oscillanti le perdite della bobina sono prevalenti. Un grande passo in avanti è stato realizzato quando si trovò che il fattore Q poteva essere applicato, ad un circuito oscillante, non solo alla sua particolare frequenza di risonanza fo, ma anche come cifra significativa di merito di un'induttanza a qualsiasi frequenza: ne sono derivati alcuni importanti risultati. Il circuito oscillante di Figura 2 accumula energia nelle sue reattanze e la dissipa in forma di calore nella sua resistenza. L'energia accumulata oscilla tra il campo magnetico dell'induttore ed il campo elettrico del condensatore:

$$\text{energia accumulata} = \text{joule}$$

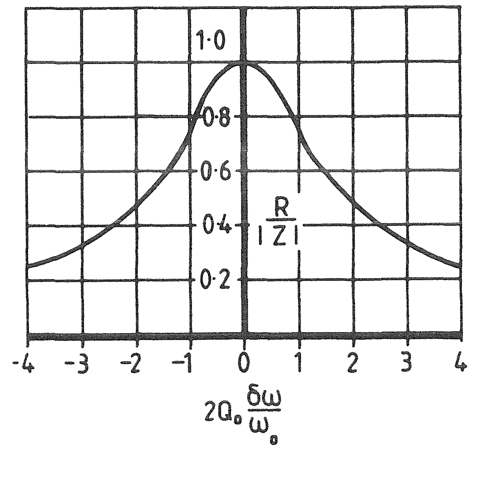
(In alternativa, l'energia accumulata potrebbe essere scritta: $0,5CVs^2$). La potenza media dissipata nel resistore è:

$$\frac{\hat{I}s\ ^2R,}{2}$$

perché la corrente efficace è:

$$Is = \frac{\hat{I}s}{\sqrt{2}}$$

Figura 3. La curva di risposta di un circuito oscillante è la ben nota curva a campana. Nella forma normalizzata qui mostrata, vale per qualsiasi circuito LCR in serie ed il picco diviene tanto più stretto (tra i punti dove il livello è 0,707 volte il massimo) quanto più elevato è il Q.



Di conseguenza l'energia dissipata per ciascun periodo è:

$$\frac{\hat{I}_s{}^2 R}{2f}$$

dove f è la frequenza in hertz.
Siamo ora in condizione di esaminare la relazione tra l'energia accumulata e quella dissipata per ciascun periodo. Il rapporto è:

$$\frac{\frac{1}{2} f L \hat{I}_s^2}{\frac{1}{2} R I_s^2} = \frac{fL}{R} = \frac{2\pi f L}{2\pi R} = \frac{\omega L}{2\pi R} = \frac{Q}{2\pi} \quad \text{(1a)}$$

Questa costituisce una definizione più precisa di Q, rispetto a quella originale di Johnson, perché è basata su relazioni energetiche:

$$Q = 2\pi \; \frac{\text{Energia totale accumulata nel sistema periodico}}{\text{Energia dissipata in un periodo}} \quad \text{(1b)}$$

Poiché nel circuito oscillante in risonanza abbiamo:

$$\omega = \omega_0 \text{ e } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C'}$$

la corrente è:

$$I_s = \frac{V_s}{R}$$

che costituisce un massimo. Questa corrente attraversa l'induttore (ed il condensatore...) e la caduta di tensione ai capi di L è:

$$V_L = I_s \, \omega \, L = \frac{V_s \, \omega \, L}{R} = Q \, V_s$$

Questo dimostra che la tensione ai capi di L (oppure ai capi di C) è pari a Q volte il valore erogato dal generatore di tensione. Se Q è di alcune centinaia, V_L potrà essere elevata. Ciò spiega perché Tesla otteneva "fattori di esaltazione" tanto grandi.
Una relazione molto simile può essere ottenuta per un circuito oscillante in parallelo, che è il corrispondente di quello in serie che abbiamo finora descritto.

Desintonizzazione: Selettività E Larghezza Di Banda

Un'altro sguardo al circuito oscillante in serie dimostra che questo presenta, fuori di sintonia, un'impedenza data da:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Alla sintonia abbiamo omega = omega$_0$ e:

$$\omega_0 L = \frac{1}{o\,\omega_0 C'}$$

$$\therefore \frac{1}{C} = \omega_0^2 L,$$

cosicché Z può essere scritta:

$$Z = R + j\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$= R\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

fronti degli altri termini, avremo:

$$\therefore Z = R\left[1 + j2Q_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0}\right]$$

Considerando il valore assoluto, o modulo di Z, ne conseguono alcuni altri interessanti risultati:

$$\therefore |Z| = R\sqrt{1 + 4Q_0^2\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Un diagramma di R/|Z| rispetto a 2Q_0 delta f/f_0 (è stato semplificato il fattore 2 pigreco) darà una curva di risonanza

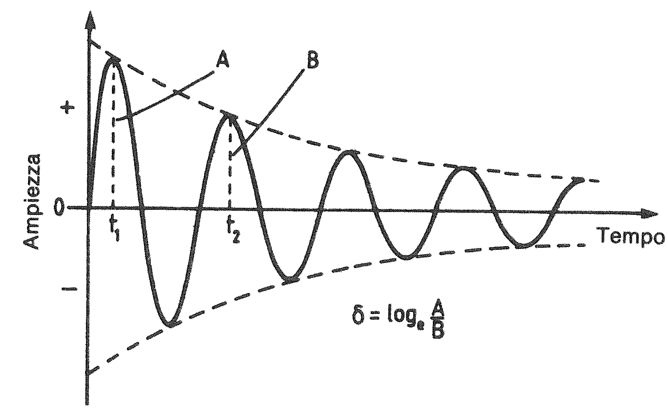


Figura 4. Se la tensione di pilotaggio V_s di Figura 2 viene bruscamente interrotta, l'energia viene gradualmente dissipata ottenendo l'oscillazione "smorzata" mostrata in questa figura. Il decremento logaritmico è definito dal tasso di smorzamento.

Q_0 è il Q in assenza di carico del circuito alla frequenza omega$_0$.
Se Q è elevato, le variazioni di omega rispetto ad omega$_0$ sono troppo piccole per dare risultati significativi (in altre parole, la risonanza viene raggiunta e sorpassata molto rapidamente se Q è elevato).
Ciò significa che si può scrivere omega$_0$ ± delta omega, dove delta omega è molto piccolo. Inserendo questo valore nella:

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_0}$$

avremo

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \triangleq \frac{2\,\delta\,\omega}{\omega_0}$$

Trascurando (delta omega)^2 nei con-

normalizzata applicabile a tutti i circuiti oscillanti e per analogia a tutti i sistemi risonanti (vedi Figura 3).
Quando:

$$4\,Q_0^2\,(\delta f/f_0)^2 = 1$$

il valore della reattanza del circuito è uguale a quello della resistenza e l'ampiezza della corrente cade ad 1/radice di 2 volte il valore ad f_0, e ciò significa che la potenza dissipata scende a metà del valore che aveva alla risonanza. Questo ci porta ad un'altra relazione significativa per Q:

$$Q_0 = \frac{f_0}{2\,\delta\,f}$$

2 delta f può essere scritta DELTA f ed equivale alla "larghezza di banda a metà potenza", ed il rapporto tra f_0 e 2 delta f è una misura dell'acutezza di risonanza o selettività.

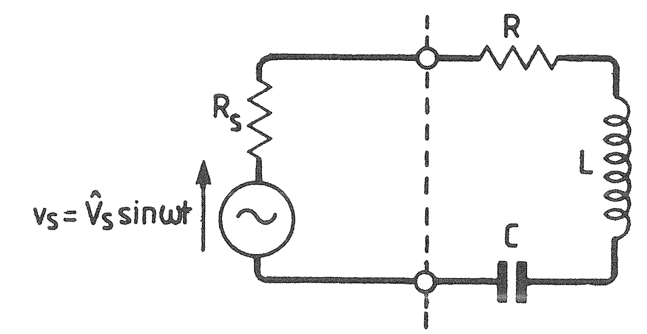


Figura 5. Durante ciascun periodo, parte dell'energia viene dissipata all'interno di R. Altra energia appare in forma di calore in Rs. Le definizioni di Q a carico ed a vuoto derivano da questa distribuzione del lavoro.

Smorzamento O Decremento Logaritmico

Un circuito oscillante, la campana di una chiesa, il diapason, l'automobile sulle sue sospensioni ed ammortizzatori (se non sono troppo in buono stato!), oscillano tutti con uno smorzamento esponenziale, del tipo mostrato in Figura 4.
Una soluzione delle equazioni per queste oscillazioni naturali è (per il circuito LCR):

$$i(t) = \hat{I}_s\, e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \cos\omega_o{}' t$$

dove omega$_o$' è pressoché uguale all'omega$_o$ usato in precedenza.
Nella Figura 4 è possibile osservare che il tempo necessario per passare da un valore di picco al successivo è t2 — t1 = T e, se le due correnti di picco corrispondenti a t1 e t2 sono I1 ed I2, avremo:

$$\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = e^{-\frac{R}{2L}(t_2 - t_1)} = e^{-\frac{RL}{2L}} = e^{-\delta}$$

dove delta è noto con il nome di decremento logaritmico:

$$\therefore \delta = \frac{RT}{2L'}$$

Oppure, poiché:

$$T = \frac{1}{f'} \quad \delta = \frac{R}{2\,f\,L}$$

avremo:

$$\therefore \delta = \frac{\pi}{Q'} \quad \text{o}\ Q = \frac{\pi}{\delta}$$

Questa relazione dimostra che la corrente oscillante in un circuito che abbia un Q uguale a 100 diminuisce al 37% del suo valore iniziale dopo circa 32 periodi (vale a dire che anche le sospensioni di un'automobile che abbiano un Q = 100 farebbero oscillare la macchina per lo stesso numero di volte dopo aver incontrato una cunetta della strada, ed allora un Q talmente elevato non è affatto desiderabile!).

Q A Carico, A Vuoto Ed Esterno

Il circuito oscillante di Figura 5 è pilotato da un generatore di tensione la cui resistenza interna è Rs. Ora, partendo dalla definizione che Q è pari a 2 pigreco volte il rapporto tra l'energia accumulata e l'energia perduta, come si può ricavare dall'equazione (1), le origini delle perdite di energia sono state finora facilmente definibili, attribuendole alla sola resistenza della bobina. Ma in Figura 5 anche Rs dissipa energia:

$$\therefore Q_L = \frac{\omega_o L \hat{I}_s^2}{2} \Big/ \frac{\hat{I}_s^2\,(R = R_s)}{2}$$

$$= \frac{\omega_o L}{R + R_s} \qquad (2)$$

Q_L è il Q a carico, equivalente al Q dell'intero sistema. Il reciproco dell'equazione (2) dà:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{R}{\omega_o L} + \frac{R_s}{\omega_o L}$$

$$\therefore \frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_o} + \frac{1}{\omega Q_{ex}}$$

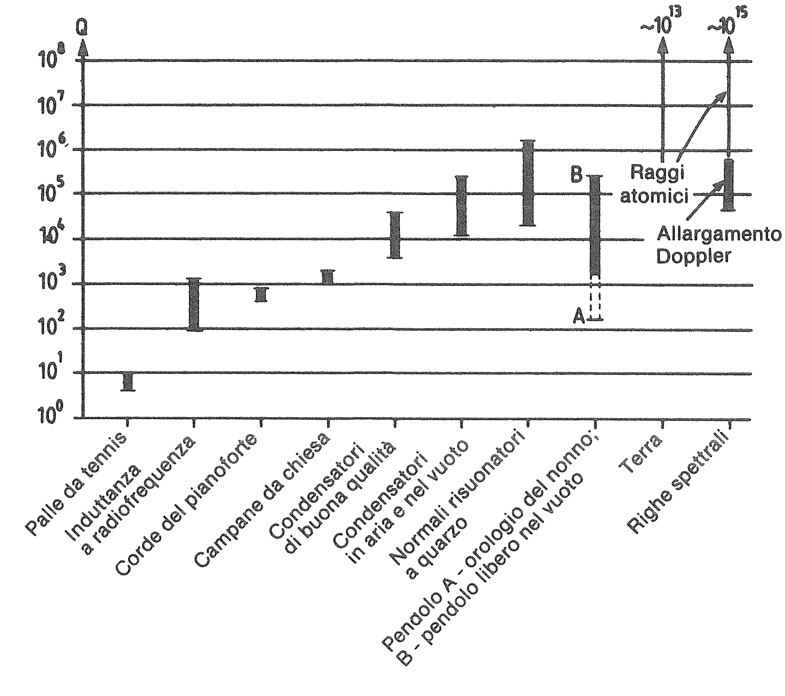


Figura 6. Rappresentazione schematica del Q di alcuni sistemi e dispositivi periodici incontrati nella tecnologia e nella vita di ogni giorno.

In questa equazione, Qo è il Q a vuoto del solo circuito oscillante: Qex è il Q esterno o di radiazione.
Per esempio, in un trasmettitore Qo dovrebbe essere elevato e di conseguenza 1/Qo deve essere molto piccolo in modo che, per quanto piccolo, il Q a carico possa essere quasi tutto un Q di radiazione (affinché l'energia a radiofrequenza non vada a riscaldare troppo l'induttore).

Q È Dovunque

L'uso del fattore Q si è rapidamente diffuso. Si afferma che qualunque sistema periodico possiede un Q se è in grado di accumulare energia dissipandola nel corso del tempo.
Anche il Q di una palla da tennis può essere provato in base alla formula (1), per trovare una relazione con il suo coefficiente di rimbalzo. Forse un giorno vedremo pubblicizzate le "palle da tennis da competizione ad alto Q"? Se verranno forniti dati esagerati, come un Q = 1000 per le palle da tennis, occorrerà spiegare al pubblico ignaro che una tale specie di palla dovrebbe rimbalzare ben 320 volte prima di scendere al 37% dell'altezza dalla quale è stata lasciata cadere.
Le palle da tennis attualmente in uso hanno un Q di circa 6 o 7. La Tabella 1 mostra un diagramma di alcuni valori tipici.
Anche la Terra, essendo un sistema periodico, possiede un Q.
È stato questo elevatissimo Q che ha scandito il tempo del mondo fino a poco fa, quando l'orologio atomico al cesio ha avuto il sopravvento grazie alla sua maggiore precisione.
La Terra ha un periodo di rotazione irregolare e queste alterazioni sono principalmente dovute alla salita ed alla discesa della linfa nella vegetazione a seconda delle stagioni ma presenta un degrado uniforme del periodo pari a circa $1{,}64 \times 10^{-3}$ ogni secolo. L'energia immagazzinata nella rotazione terrestre è 0,5 I omega^2 joule: I è il momento d'inerzia, omega è la velocità angolare. Di conseguenza, in base all'energia perduta durante un periodo, confrontata con il doppio dell'energia accumulata, troveremo che il Q della Terra è circa 10^{13}.
Anche se rappresentata da una singola lettera dell'alfabeto, l'onnipresente Q è una magnifica idea che, partendo dall'originale rapporto di Johnson tra la reattanza di una bobina e la sua resistenza, è arrivata ad abbracciare la vibrazione degli atomi da un lato e la rotazione della Terra dell'altro. Forse un giorno sentiremo parlare anche del Q della Galassia...

■